# شرایطِ جداشدنِ ذره‌ای متحرک از رویه‌ای بدونِ اصطکاک

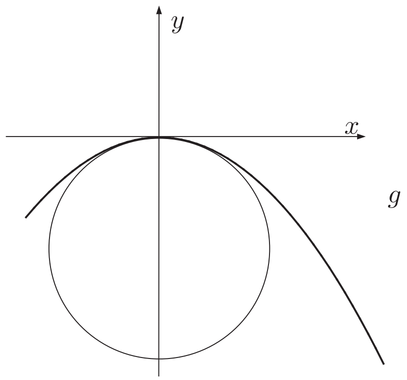
**امیر آقامحمدی**

ذره‌ای مماس بر رویه‌ای پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بررسی کنیم به ازایِ چه شرایطی ذره از رویه جدا می‌شود. ابتدا مسئله را برایِ رویه‌ای دل‌خواه با سطحِ مقطعی با معادله‌یِ $y = f(x)$ مطالعه و شرطِ جداشدن ذره از رویه را به دست می‌آوریم. سپس به عنوانِ مثال رویه‌هایی با معادله‌یِ $y = -\alpha x^k,\ (\alpha, k > 0)$، را با تفصیلِ بیش‌تری بررسی می‌کنیم.

## ۳ مقدمه

ذره‌ای از بالایِ نیم‌کره‌ای به شعاعِ $R$ با سرعتِ اولیه‌ای مماس بر سطح پرتاب می‌شود. اگر از اصطکاکِ بینِ ذره و رویه چشم‌پوشی کنیم و سرعتِ اولیه‌یِ ذره بزرگ‌تر یا مساویِ $\sqrt{Rg}$ باشد ذره در همان ابتدا از سطحِ نیم‌کره جدا می‌شود. اگر سرعتِ اولیه‌یِ آن کوچک‌تر از این مقدارِ حدّی باشد، حتماً کمی بعدتر ذره در نقطه‌ای از سطحِ جدا می‌شود. این مسئله یکی از مسائلِ استاندارد و نسبتاً ساده‌یِ مکانیک است که معمولاً در درس‌هایِ مکانیکِ مقدماتی بررسی می‌شود. کاری که ما می‌خواهیم بکنیم بررسی‌یِ کلی‌یِ این مسئله است، یعنی رویه‌ای دل‌خواه در نظر می‌گیریم. ذره‌ای مماس بر رویه پرتاب می‌شود. برایِ چه رویه‌هایی ذره در همان ابتدا از سطح جدا می‌شود، یا برایِ کدام‌ها از رویه جدا نمی‌شود. خواهیم دید برایِ بعضی از رویه‌ها به ازایِ هیچ سرعتِ اولیه‌یِ محدودی، هر چه‌قدر بزرگ هم باشد، ذره همان ابتدا از سطح جدا نمی‌شود، اما به ازایِ هر سرعتِ اولیه‌ای، هر چه‌قدر هم کوچک، حتماً مکانی وجود دارد که بعداً از رویه جدا شود. اگر ذره‌ای از قله‌یِ رویه‌ای به شکلِ سهمی پرتاب شود، یا سرعتِ اولیه‌یِ آن از مقدارِ حدّی‌ای بزرگ‌تر است که همان ابتدا از سطح جدا می‌شود، یا آن‌که هرگز سطح را ترک نمی‌کند. رویه‌هایی هم وجود دارند که به ازایِ هیچ سرعتِ اولیه‌ای نه همان ابتدا جدا می‌شوند و نه هیچ زمانِ دیگری.

# ۴ شرایطِ جداشدنِ ذره‌ای متحرک از رویه‌ای با مقطعِ سهمی




بیایید در ابتدا رویه‌ای که سطحِ مقطعِ آن سهمی‌ای با معادله‌یِ $y = -ax^2$ است، را در نظر بگیریم. از اصطکاکِ بینِ ذره و رویه چشم‌پوشی می‌کنیم. ذره‌ای با سرعتِ اولیه‌یِ $v_0\mathbf{i}$، $(v_0 > 0)$، مماس بر رویه از مبدأ پرتاب می‌شود. $v_0$ چه‌قدر باشد تا ذره در همان ابتدا از سهمی جدا شود؟ نیروهایِ وارد بر ذره، وزنِ آن $mg$، و نیرویِ عمودی‌یِ سطح $N$ است. سهمی در نزدیکی‌یِ مبدأ بخشی از دایره است و برایِ آن‌که ذره رویِ سهمی حرکت کند نیرویِ برآیند باید بتواند نیرویِ جانبِ‌مرکزِ لازم را تأمین کند.

ابتدا باید شعاعِ این دایره $R$ را به دست آوریم. مطابقِ شکل دایره‌ای در مبدأ مماس بر این سهمی در نظر می‌گیریم به طوری که مشتقِ دومِ دایره و سهمی در مبدأ برابر باشند. در این صورت می‌گوییم شعاعِ انحنایِ دو منحنی یکی است.

معادله‌یِ دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد و مرکزش رویِ محورِ $y$ است عبارت است از

$$x^2 + (y+R)^2 = R^2. \tag{1}$$

در هم‌سایگی‌یِ مبدأ معادله‌یِ این دایره عبارت است از

$$\begin{aligned} y &= -R + \sqrt{R^2 - x^2} \approx -R + R\left(1 - \frac{x^2}{2R^2}\right) \\ &\approx -\frac{x^2}{2R}. \end{aligned} \tag{2}$$

از برابر قرار دادنِ این معادله با معادله‌یِ سهمی شعاعِ انحنایِ سهمی در مبدأ به دست می‌آید

$$R = \frac{1}{2\alpha}. \tag{3}$$

قانونِ نیوتن برایِ ذره‌ای که در نزدیکی‌یِ مبدأ رویِ سهمی حرکت می‌کند عبارت است از

$$mg - N = \frac{mv_0^2}{R} = 2\alpha m v_0^2, \quad \Rightarrow \quad N = m\left(g - 2\alpha v_0^2\right) \tag{4}$$

اگر $v_0 > v_c := \sqrt{\dfrac{g}{2\alpha}}$ باشد، ذره در همان ابتدا از رویه‌یِ سهمی‌شکل جدا می‌شود. اگر $v_0 = v_c$ باشد چه می‌شود؟ فرض کنید که رویه‌ای نبود و ذره از مبدأ با سرعتِ اولیه‌یِ $v_0$ پرتاب شده بود، مسیرِ آن یک سهمی با معادله‌یِ $y = -\dfrac{v_0^2}{2g} = -\alpha x^2$ بود. بنا بر این در این حالت مهم نیست که رویه وجود داشته باشد و یا نباشد، پرتابه مماس بر رویه است و نیرویِ عمودی‌یِ سطح هم‌واره صفر است.

## ۵ شرایطِ جداشدنِ ذره‌ای متحرک از رویه‌ای با مقطعِ $y = f(x)$

حالا بیایید رویه‌ای که معادله‌یِ سطحِ مقطعش $y = f(x)$ با شرطِ $f(0) = 0$ است، را در نظر بگیریم. ذره‌ای در مبدأ با سرعتِ اولیه‌یِ $v_0$، مماس بر خمِ $y = f(x)$ پرتاب می‌شود. فرض کنید ذره بالاخره در جایی مثلِ $\mathbf{r}_0$ از رویه جدا می‌شود. در مکانِ جدا شدن نیرویِ عمودی‌یِ سطح $N = 0$ و تنها نیرویِ وارد بر ذره $-mg\mathbf{j}$ است. پس مؤلفه‌هایِ شتابِ ذره در نقطه‌یِ جداشدن

$$\ddot{x}\big|_{\mathbf{r}_0} = 0, \qquad \ddot{y}\big|_{\mathbf{r}_0} = -g. \tag{5}$$

که علامتِ نقطه بالایِ یک کمیت به معنیِ مشتق‌گیری نسبت به زمان است. با توجه به معادله‌یِ رویه تا وقتی که ذره رویِ رویه حرکت می‌کند

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x} f'(x), \\ \ddot{y} &= \ddot{x} f'(x) + \dot{x}^2 f''(x), \end{aligned} \tag{6}$$

که علامتِ پریم به معنیِ مشتق‌گیری نسبت به $x$ است. با استفاده از این‌ها مؤلفه‌هایِ سرعت در نقطه‌یِ جداشدن را هم می‌توان به دست آورد

$$\begin{aligned} \dot{x}\big|_{x_0} &= \sqrt{\frac{g}{-f''(x_0)}}, \\ \dot{y}\big|_{x_0} &= f'(x_0)\sqrt{\frac{g}{-f''(x_0)}}, \end{aligned} \tag{7}$$

اولین نتیجه‌ای که از این معادله به دست می‌آید این است که برایِ آن‌که نقطه‌یِ جداشدنی وجود داشته باشد جمله‌یِ زیرِ رادیکال در روابطِ بالا باید مثبت باشد. معنیِ این حرف این است که در نقطه‌یِ جداشدن $f''(x_0) < 0$ باید باشد. پس رویه‌ای که در همه‌یِ نقاطِ آن $f''(x) > 0$ است امکان ندارد شرطِ جداشدن برقرار شود.

پایستگی‌یِ انرژی معادله‌ای بینِ $f$، و مشتقاتِ $f$ به ما می‌دهد

$$\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgf(x) = \frac{m}{2} v_0^2,$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}^2 = \frac{v_0^2 - 2gf(x)}{1 + f'^2(x)}. \tag{8}$$

با استفاده از معادله‌یِ اولِ (7) که در نقطه‌یِ جداشدن برقرار است و جاگذاری‌یِ آن در رابطه‌یِ (8) نتیجه می‌شود

$$-\frac{g}{f''(x_0)} = \frac{v_0^2 - 2gf(x_0)}{1 + f'^2(x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x_0)\left(v_0^2 - 2gf(x_0)\right) + g\left(1 + f'^2(x_0)\right) = 0. \tag{9}$$

بنابراین با داشتنِ $f(x)$ و حلِ این معادله برایِ $x_0$، اگر جوابی برایِ آن یافت شد نقطه‌ای یافت می‌شود که شرطِ جداشدن برایِ آن وجود دارد. اما اگر این معادله جواب نداشته باشد ذره از رویه جدا نمی‌شود. یادآوری می‌کنیم که اگر تقعرِ رویه همواره مثبت باشد جسم هرگز از رویه جدا نمی‌شود.

# ۶ مثال- $y = -\alpha x^k,\ (\alpha, k > 0)$

معادله‌یِ رویه $y = -\alpha x^k,\ (\alpha, k > 0)$ است. می خواهیم جداشدنِ ذره از رویه به ازایِ مقادیرِ مختلفِ $k$ بررسی کنیم. شرطِ (9) به صورتِ زیر در می‌آید

$$\alpha^2 gk(k-2)\, x_0^{2k-2} + \alpha v_0^2 k(k-1)\, x_0^{k-2} = g. \tag{10}$$

برایِ بررسی‌یِ این‌که آیا معادله‌یِ (10) جواب دارد یا نه، کافی است ببینیم که آیا خمِ $A(x_0) = \alpha^2 gk(k-2)x_0^{2k-2} + \alpha v_0^2 k(k-1)x_0^{k-2}$، خطِ مستقیم و ثابتِ $B(x_0) = g$ را قطع می‌کند.

## ۶-۱ $k > 2$

به ازایِ $k > 2$، $f''(0) = 0$ است. در این حالت شعاعِ انحنایِ خمِ $f(x)$ در $x = 0$ بی‌نهایت و رویه در نزدیکی‌یِ مبدأ مثلِ یک سطحِ تخت است. با استفاده از

$$N - mg = m\ddot{y}, \tag{11}$$

نتیجه می‌شود که $N$ در مبدأ مثبت است. بنابراین به ازایِ هیچ سرعتِ محدودی نمی‌توان ذره را مماس بر رویه به گونه‌ای پرتاب کرد که در همان ابتدا از رویه جدا شود. اگر $v_0 = 0$ باشد، ذره در مبدأ ساکن می‌ماند. در صورتی که اختلالِ کوچکی در سرعتش ایجاد کنیم شروع به حرکت می‌کند. در حالتی که $v_0 \neq 0$ است، به ازایِ $k > 2$، $A(0) = 0$، و $A(x_0)$ تابعی صعودی است. پس حتماً دو خم با معادله‌هایِ $A(x_0)$، و $B(x_0)$ هم‌دیگر را قطع می‌کنند. بنابراین برایِ $k > 2$، به ازایِ هیچ سرعتِ محدودی هر چه‌قدر بزرگ ذره همان ابتدا از سطح جدا نمی‌شود، اما به ازایِ هر سرعتی هر چند کوچک حتماً مکانی وجود دارد که بعداً از رویه جدا شود.

## ۲ـ۶ $k=2$

موردِ $k=2$، همان سهمی است که در ابتدا هم بررسی کردیم. اگر $v_0=0$ باشد، مثلِ حالتِ قبل ذره در مبدأ ساکن می‌ماند. برایِ $v_0\neq 0$ و $k=2$، $A(x_0)=2\alpha v_0^2$ است و شرطِ جدا شدن همانی است که قبلاً به دست آورده بودیم. به ازایِ سرعت‌هایِ بزرگ‌تر از $v_c=\sqrt{\dfrac{g}{2\alpha}}$ همان ابتدا از رویه جدا می‌شود. اگر سرعتِ اولیه $v_c$ باشد هم‌واره $N=0$ است و ذره همیشه در مجاورتِ رویه می‌ماند. حالتِ اخیر مثلِ حالتی است که رویه‌ای نیست و مسیرِ حرکتِ ذره یک سهمی است. اگر سرعتِ اولیه کوچک‌تر از $v_c$ باشد، ذره هیچ‌گاه از سطح جدا نمی‌شود.

## ۳ـ۶ $1<k<2$

به ازایِ $1<k<2$، $f''(0)\to-\infty$ و شعاعِ انحنا در مبدأ صفر است. برایِ آن‌که رویِ رویه حرکت کند در مبدأ $\ddot{y}\to-\infty$ و در نتیجه $N$ باید منفیِ بی‌نهایت شود که ممکن نیست. بنا بر این به ازایِ هر سرعتِ غیرِ صفری همان ابتدا ذره از رویه جدا می‌شود. در واقع این خم از همان اول زیرِ سهمیِ سقوطِ آزاد است. در صورتی که $v_0=0$ باشد ذره در مبدأ ساکن می‌ماند.

## ۴ـ۶ $k=1$

$A(x_0)=-\alpha^2 g$، و دو خمِ $A(x_0)$، و $B(x_0)=g$ هیچ‌گاه هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند. این انتظار را باید می‌داشتیم، زیرا رویه یک سطحِ تختِ شیب‌دار است و ذره‌ای که مماس بر سطح پرتاب شود هرگز سطح را ترک نمی‌کند. در صورتی که $v_0=0$ باشد واضح است که ذره شروع به حرکت می‌کند ولی هرگز از سطحِ شیب‌دار جدا نمی‌شود.

## ۵ـ۶ $k<1$

$A(x_0)$، هم‌واره منفی است و دو خمِ $A(x_0)$، و $B(x_0)=g$ هیچ‌گاه هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند. این انتظار را باید می‌داشتیم، زیرا برایِ چنین خمی $f''(x_0)>0$ و مطابقِ (7) ذره‌ای که مماس بر سطح پرتاب شود هرگز سطح را ترک نمی‌کند. در صورتی که $v_0=0$ باشد واضح است که ذره شروع به حرکت می‌کند ولی هرگز از رویه جدا نمی‌شود.

**قدردانیـ** لازم می‌دانم از محمدِ خرمی و امیرحسینِ فتح‌اللهی برایِ پیش‌نهادهایِ مفیدی که در موردِ این مقاله داشتند تشکر کنم.